Решения задач Четвертой олимпиады для школьников по теории вероятностей и статистике. 2011 год

1. Проблема профессора Кадзуо Хаги. Профессор Кадзуо Хага из университета Цукубы[1] изобретатель и энтузиаст оригамики — геометрического оригами. Однажды он поставил интересный вопрос.

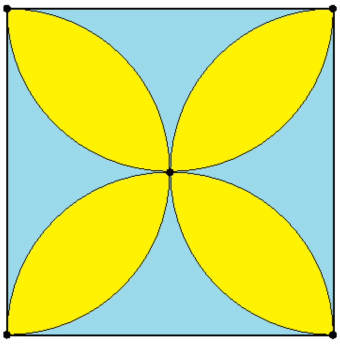


Рис. 1

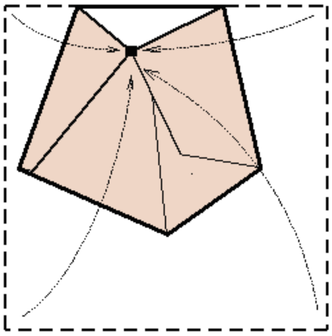


Рис. 2

На рис. 1 бумажный квадрат разделен на желтые и голубые области четырьмя полуокружностями. Получается изящный орнамент, напоминающий цветок.

Если выбрать точку в какой-нибудь голубой области и затем последовательно сделать сгибы так, что каждая вершина квадрата наложится на эту точку, то в результате получится пятиугольник (рис. 2). Поэтому объединение голубых фигур профессор Хага назвал областью пятиугольников или просто 5-областью. Желтым цветом показана 6-область. Четыре вершины и центр квадрата — точки, приводящие к четырехугольникам.

Профессор Хага неоднократно рассказывал школьникам и учителям математики о распределении точек по числу вершин получающегося многоугольника. Он пишет следующее:

«*Я заметил, что, если попросить выбрать случайную точку, то намного больше людей отмечает точку, приводящую к шестиугольнику, чем к пятиугольнику. Очень редко встречаются те, кто выбирает точки, дающие четырехугольник. Возникает вопрос: пропорционально ли число людей, о которых идет речь, площадям областей?*

Чтобы ответить на этот вопрос, найдем площади областей. Пусть длина стороны квадрата равна 1. *Тогда радиус каждого полукруга равен* $0{,}5$, *а его площадь равна* $\frac{\pi}{8}$. *Значит, общая площадь четырех полукругов равна* $\frac{\pi}{2}$. *Таким образом, площадь лепестков, то есть площадь области шестиугольников равна* $\frac{\pi}{2}-1\approx 0{,}57$. *А площадь области пятиугольников равна* $1-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=2-\frac{\pi}{2}\approx 0{,}43$.

Оказывается, разница площадей не очень велика. Отношение числа людей, выбирающих точки, лежащие в соответствующих областях несоразмерно отношению площадей. Было бы интересно узнать причину, по которой точки вне лепестков обладают меньшей привлекательностью, чем точки внутри них».

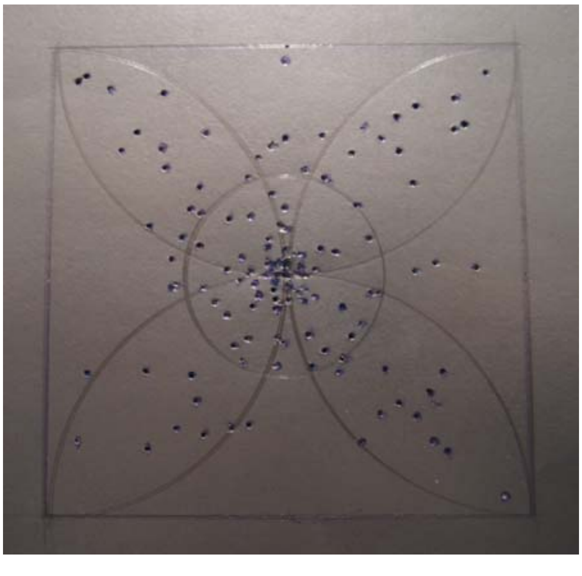
[1] Университетский город близ Токио

Проведите эксперимент. Для этого Вам потребуется несколько десятков бумажных квадратов. Можно использовать белые чистые салфетки, разрезанные на квадраты без сгибов. Попросите как можно больше людей (своих друзей, а также взрослых) отметить произвольную точку на чистом бумажном квадрате. Если собрать все отмеченные точки на одном рисунке, то получится распределение точек. Может быть, свойства этого распределения помогут объяснить, почему любители шестиугольников встречаются гораздо чаще, чем мог бы ожидать профессор Хага, сравнивая площади областей?

Эссе Анны Ершовой (8 класс, школа № 654 г. Москвы)
Публикуется с сокращениями и незначительной редакторской правкой

Для ответа на вопрос профессора Кадзуо Хаги: «Почему точки вне лепестков на его диаграмме обладают меньшей привлекательностью, чем точки внутри них?», нужно было проверить, так ли это.

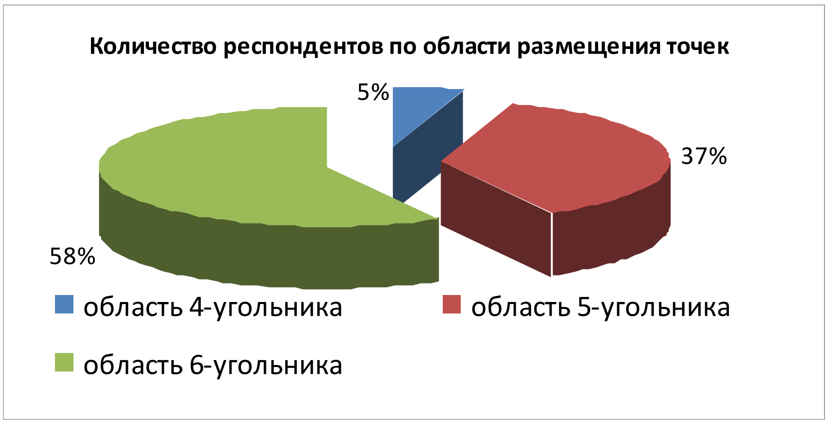
Мы взяли много бумажных квадратных листочков размером 9×9 см (на таких листочках делают записи в офисах) и провели опрос. Мы предлагали поставить точку в произвольном месте на квадратном листочке. Чтобы отличить ответы респондентов (мужчина, женщина, школьник) листочки были разные. Например, школьникам давались листочки с рисунком на обратной стороне. Опрос проводился в офисе коммерческой организации, в организации госструктуры, в общеобразовательной и музыкальной школах. Для проведения опроса привлекались помощники — родители. Всего в опросе участвовало 147 респондентов.



Обработка результатов. Получив 147 листочков с точками в разных местах, нужно было собрать их на одном рисунке. Для этого на плотном листе бумаги был нарисован квадрат-трафарет. Далее последовательно брался квадрат с точкой, накладывался на трафарет, и точка прокалывалась иголкой. Так удалось получить на одном рисунке все точки в виде дырочек —распределение множества точек (см. фотографию). Нарисовав 4 полуокружности радиусом 4,5 см, можно было видеть, что точки распределились в основном так, как и говорил профессор — внутри лепестков.

В результате было получено:
«6-угольников» — 84 чел. или 58%
«5-угольников» — 55 чел. или 37%
«4-угольников» — 8 чел. или 5%

Полученные данные показаны на диаграмме.



Анализ результатов. Большинство респондентов (58%) поставили точку в области шестиугольников. Было замечено, что некоторые люди рассматривают листок как чистый лист бумаги, писать на котором нужно слева вверху с красной строки — это также область шестиугольников.

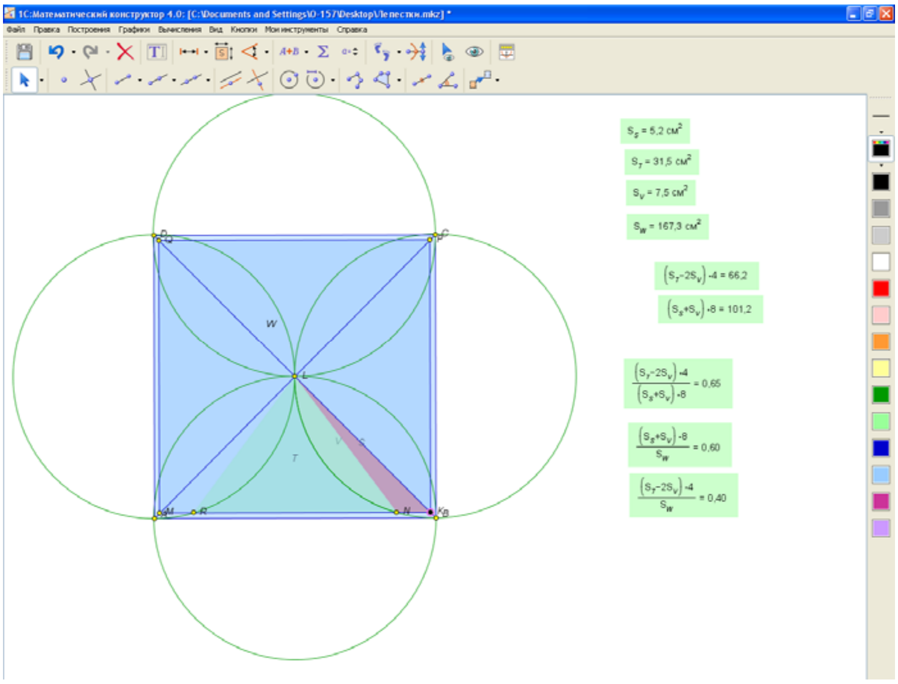
Соразмерность отношения площадей и отношения количества людей. При проведении опроса было замечено, что многие люди стараются поставить точку в середину. Так как попасть в самый центр довольно трудно, точки попадают в область «6-угольников», которая расположена близко к центру. Поэтому я решила посмотреть на площади внутри «центральной» области.

На фото видно, что довольно густо заполнена область вблизи центра (менее половины радиуса, с помощью которого строились лепестки). Если принять за единицу сторону квадрата, то радиус круга, в который попало большинство точек, равен 0,2. Площадь круга с радиусом приблизительно равна 0,13, что составляет 13% от общей площади квадрата.

Число точек, попавших в круг, радиусом 0,2 равно 87 или около 60% от общего числа точек. Откуда следует вывод, что на площади 13% разместилось 60% точек. Площадь «области пятиугольников» внутри маленького круга составила 0,031 (я ее считала приблизительно, как число несколько меньшее площади четырех треугольников площадью 0,009 каждый; основание — 0,09, высота — 0,2) то есть 24% площади круга. Число точек, попавших в область пятиугольников маленького круга, равно 7 (8%).

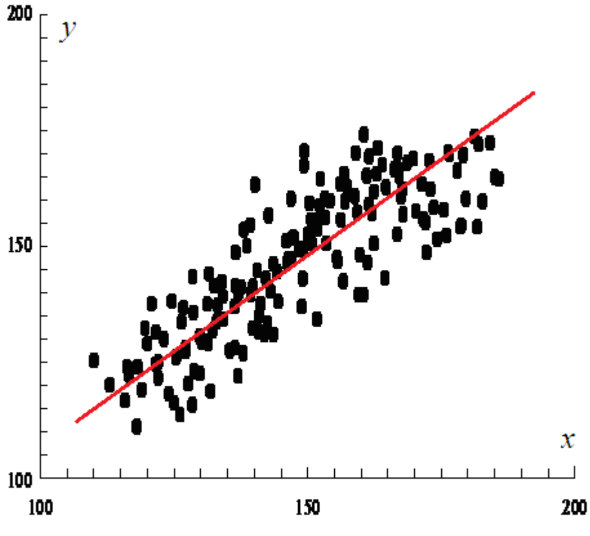
Также я решила, воспользовавшись программой «Математический конструктор», посмотреть на соотношения площадей в квадрате, который будет несколько меньше данного, т.е. откинув из рассмотрения несколько редких точек, которые ставят близко к краям.

Расчёты в «Математическом конструкторе» показали, что при небольшом отступе от краев основного квадрата, площадь «области пятиугольников» занимает 40%, а площадь «области шестиугольников» — 60%. А это уже сопоставимо с отношениями количества людей (если еще выбросить из рассмотрения людей, выбирающих «область четырехугольника»).



Заключение. Я считаю, что если учесть «психологию» людей, которые неуютно чувствуют себя на краю, и соотносить площади, откинув края квадрата, то отношения количества людей и отношения площадей могут оказаться вполне соразмерными. А точки внутри лепестков обладают большей привлекательностью в связи с тем, что они занимают больше центральной части и в них проходят оси симметрии, приятные глазу.

2. Как связан рост мальчиков и рост девочек?



Однажды учительница математики решила показать своим ученикам, что рост мальчиков и рост девочек — независимые случайные величины. Для этого учительница провела исследование. В каждом классе она выбрала случайным образом 10 мальчиков и 10 девочек, случайно разбила их на пары мальчик-девочка и записала рост мальчика x_k и девочки y_k в каждой паре. Получились пары $(x_k\, ;\, y_k)$.

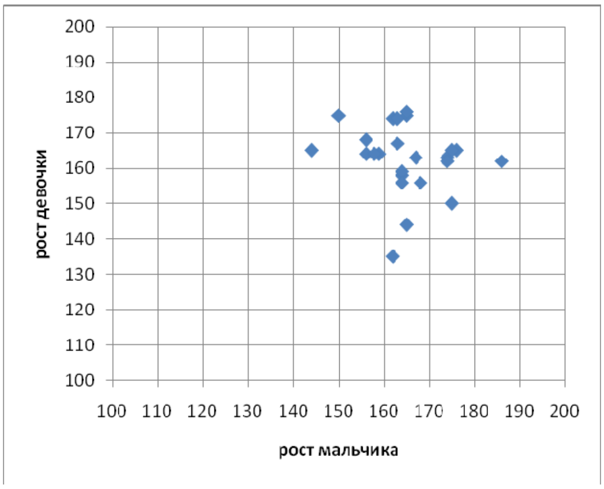
Когда учительница отметила все результаты на диаграмме рассеивания (см. рис.) она к своему ужасу обнаружила, что точки сгруппированы возле наклонной прямой (см. рис). Значит, между ростом мальчиков и ростом девочек есть очевидная связь! Как же так?

Напишите короткое эссе (1 – 2 страницы), в котором попробуйте объяснить, ошиблась ли учительница в своих выводах, и если да, то в чем состоит ее вероятная ошибка.

Эссе Ирины Афанасьевой (7 класс школы № 1000 г. Москвы)
Публикуется с сокращениями и незначительной редакторской правкой

Перед нами диаграмма рассеивания. Она показывает примерный характер взаимосвязи между двумя числовыми характеристиками. Если почти все точки образуют наклонное облако, то связь между рассматриваемыми величинами есть. На представленной диаграмме между ростом мальчиков и ростом девочек есть очевидная связь. Но я считаю, что рост мальчиков и рост девочек — две независимые случайные величины. На диаграмме рассеивания, которую составила учительница, видно, что почти в каждой паре мальчик и девочка были приблизительно одного роста, именно поэтому на диаграмме рассеивания прослеживается связь. Так как учительница выбирала детей из одного класса, скорее всего, эти дети приблизительно одного возраста, а значит, и близкого роста (например, пары первоклассников, пары второклассников, пары десятиклассников и т.д.).

Для того чтобы проследить возможное наличие связи или её отсутствие, надо выбрать другие пары: провести исследование среди детей одного возраста. Я думаю, что если в одной паре девочка будет выше мальчика, то в другой паре — наоборот, и тогда точки не будут группироваться возле наклонной прямой.



Я провела опрос среди учеников 7-х классов школы №1000 об их росте и случайным образом распределила их по парам (мальчик, девочка) конечно, это очень небольшое количество (48 опрошенных — 24 пары), чтобы делать достоверные выводы, но у меня получилась совершенно другая диаграмма рассевания. Глядя на эту диаграмму можно предположить, что рост мальчиков и рост девочек — две независимые случайные величины.

3. Страховая компания. Страховая компания ABC страхует автомобили. Страховая стоимость автомобиля зависит от его возраста. Агенты компании рассчитывают уценку очень просто — машины старше двух лет каждый год теряют в цене 10%.

По данным сайта www.auto.ru или других источников проведите исследование на тему — соответствует ли оценочная политика страховой компании ABC практике, сложившейся на рынке подержанных автомобилей. Свое исследование напишите в виде небольшого эссе (2-3 страницы). При выполнении работы учтите, что среди автомобилей бывают тюнингованные (особым образом оборудованные и отделанные) и разбитые. Цены на те и другие значительно отличаются от средней цены.

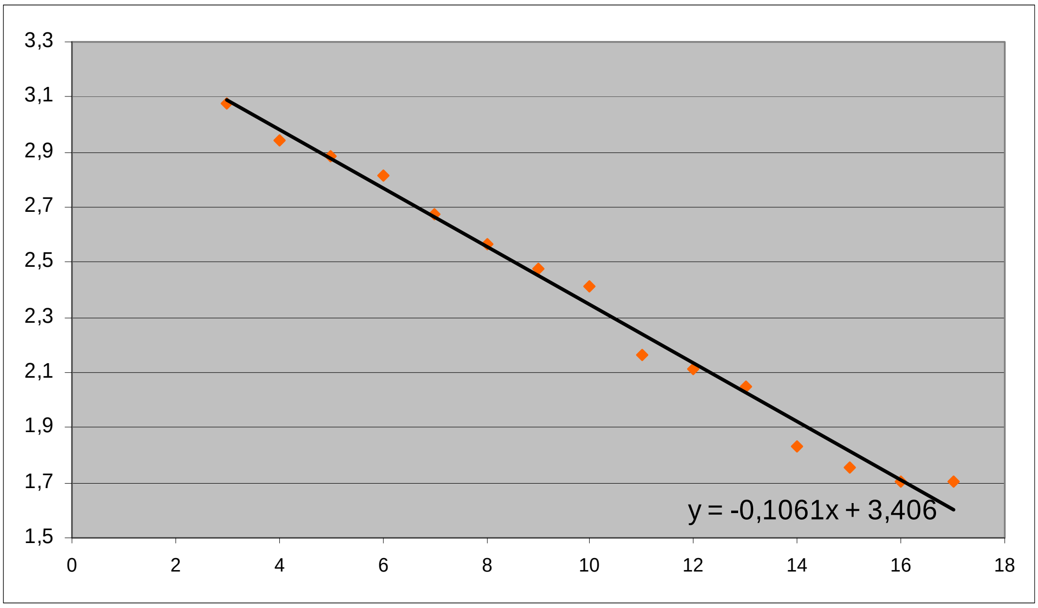
Возможная идея исследования. Исследуем динамику цен на распространенные в Москве подержанные автомобили «Фольксваген-Пассат». Составим таблицу «Год выпуска» — «Цена» для Пассатов, выставленных на продажу через Интернет-сайт Auto.ru. Будем учитывать только машины одной модели 1995 – 2009 годов выпуска (более старых машин в продаже почти нет). 11 февраля 2011 года на продажу было выставлено 1565 машин.

Среди автомобилей встречаются битые (попавшие в аварию), не прошедшие таможню, машины с правым рулем, а также эксклюзивные машины с дорогостоящими нестандартными устройствами, полноприводные, с художественной окраской, дорогой отделкой салона и т.п. Все эти обстоятельства приводят к резкому отличию их цен от цен обычных авто. Чтобы убрать влияния этих выбросов, вместо среднего арифметического вычислим медиану цен Пассатов за каждый год (вместо медианы можно взять урезанное среднее, отбросив перед усреднением, скажем, 25 % крайних значений).

Получим таблицу из 15 строк. Предполагая, что цена автомобиля убывает в геометрической прогрессии (уменьшается на одно и то же число процентов), получаем, что логарифм цены должен убывать линейно год от года. Добавим в таблицу логарифм цены (переменную y).

Возраст машины x_i (лет)	Медиана цен m_i (тыс. $)	$y_i = \ln m_i$
17	5,492	1,703
16	5,5	1,705
15	5,8	1,758
14	6,25	1,833
13	7,784	2,052
12	8,25	2,110
11	8,7	2,163
10	11,15	2,411
9	11,9	2,477
8	13	2,565
7	14,5	2,674
6	16,7	2,815
5	17,9	2,885
4	19	2,944
3	21,7	3,077

Для пар $(x_i; y_i)$, где $i = 1...15$ построим диаграмму рассеивания. На построенной диаграмме видно, что точки близки некоторой прямой. Это означает, что предположение о примерно одинаковом процентном удешевлении подержанных машин оправдывается (по крайней мере, для Пассатов).



Однако никакую количественную оценку удешевления мы еще не сделали. Чтобы сделать ее, воспользуемся методом наименьших квадратов. Построим линейную регрессию $y = ax + b$. (Вычисления производились с помощью Excel). Получается линейная зависимость.

$$y = -0,1061x + 3,406.$$

Эта прямая показана на диаграмме рассеивания. Осталось узнать, на сколько же дешевеют машины ежегодно? Натуральный логарифм цены (в тыс. $) ежегодно понижается на 0,1061, следовательно, цена умножается на $e^{-0,1061} \approx 0,8993$, то есть составляет $89,9\,\%$ от цены предыдущего года. Таким образом, по нашим расчетам средняя машина ежегодно дешевеет на $10,1\,\%$.

Наши выводы для Пассатов весьма хорошо согласуются с ценовой политикой упомянутой страховой компании, которая упоминалась в начале.

4. Медиана. В числовом наборе 100 чисел. Если выкинуть одно число, то медиана оставшихся чисел будет равна 78. Если выкинуть другое число, то медиана оставшихся чисел будет 66. Найдите медиану всего набора.

Решение. Расположим числа в порядке возрастания. Если выкинуть число из первой половины ряда (с номером до 50), то медианой оставшихся чисел будет 51-е число ряда. Если выкинуть число из второй половины, то медианой оставшихся чисел станет число с номером 50, но оно не больше, чем 51-е число. Таким образом, 50-е число равно 66, а 51-е число равно 78. Значит, медиана всего набора равна[2] $\frac{66+78}{2} = 72$.

Ответ: 72.

[2] Формально правильный ответ: любое число от 66 до 78 включительно. Например, число 72. Это получается, если пользоваться формальным определением медианы: медианой числового набора называется число m, если хотя бы половина чисел набора не больше и хотя бы половина чисел набора не меньше, чем m.

5. Легкие номера. В городе, где живет Рассеянный Ученый, телефонные номера состоят из 7 цифр. Ученый легко запоминает телефонный номер, если этот номер палиндром, то есть он одинаково читается слева направо и справа налево.

Например, номер 4435344 Ученый запоминает легко, потому что этот номер палиндром. А номер 3723627 не палиндром, поэтому Ученый такой номер запоминает с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Ученый запомнит легко.

Решение. Как известно, первая цифра телефонного номера может быть не всякой. Пусть число разрешенных первых цифр равно m. Тогда общее число номеров равно $m \cdot 10^6$. Номер-палиндром однозначно определяется первыми четырьмя цифрами. Значит, семизначных палиндромов $m \cdot 10^3$.

Поэтому вероятность того, что случайный номер будет палиндромом, равна

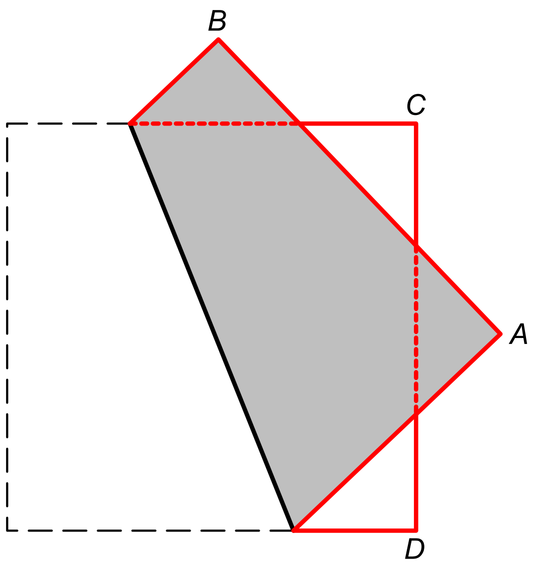
$$\mathrm{P} = \frac{m \cdot 10^3}{m \cdot 10^6} = 0{,}001.$$

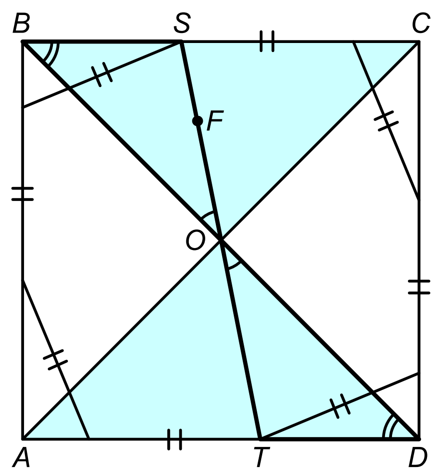
Ответ: $0{,}001$.

6. Оригами. Митя собирается согнуть квадратный лист бумаги $ABCD$. Митя называет сгиб красивым, если сторона AB пересекает сторону CD и четыре получившихся прямоугольных треугольника равны.

Перед этим Ваня выбирает на листе случайную точку F. Найдите вероятность того, что Митя сможет сделать красивый сгиб, проходящий через точку F.

Решение. Развернем красивый сгиб (см. рис.). Диагональ BD и линия сгиба ST пересекаются в точке O. Треугольники BSO и DTO равны (по стороне и двум углам). Значит, $BO = OD$, и поэтому O — центр квадрата. Таким образом, линия сгиба ST проходит через центр квадрата. Очевидно, обратное также верно — если линия сгиба проходит через центр квадрата, то сгиб будет красивым.





Точка S может занять любое положение между B и C, а точка T при этом расположена между D и A. Значит, чтобы через точку F можно было сделать красивый сгиб, нужно, чтобы точка F принадлежала треугольнику BOC или треугольнику AOD.

Площадь фигуры, ограниченная этими треугольниками, равна половине площади квадрата.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

7. **Избиратели**. 40% приверженцев некоторой политической партии являются женщинами. 70% приверженцев этой партии — городские жители. При этом 60% горожан, поддерживающих партию, — мужчины. Являются ли независимыми события «приверженец партии — горожанин» и «приверженец партии — женщина»?

Решение. Пусть событие A «приверженец — женщина», а B — «приверженец — горожанин». По условию $\mathrm{P}(A)=0,4$.

В городе живет 70% избирателей партии, из них 60% мужчины. Поэтому оставшиеся 40% — женщины, то есть доля женщин среди горожан такая же, как и среди всех избирателей. Значит, $\mathrm{P}(A|B)=0,4$.

Безусловная вероятность события A и условная вероятность этого события при условии B одинаковы. Это и говорит о независимости событий[3].

Ответ: Да, события независимы.

8. Надежность прибора. Рассеянный Ученый сконструировал прибор, состоящий из датчика и передатчика. Средний срок (математическое ожидание) службы датчика 3 года, средний срок службы передатчика 5 лет. Зная распределения срока службы датчика и передатчика, Рассеянный Ученый вычислил, что средний срок службы всего прибора равен 3 года 8 месяцев. Не ошибся ли Рассеянный Ученый в своих расчетах?

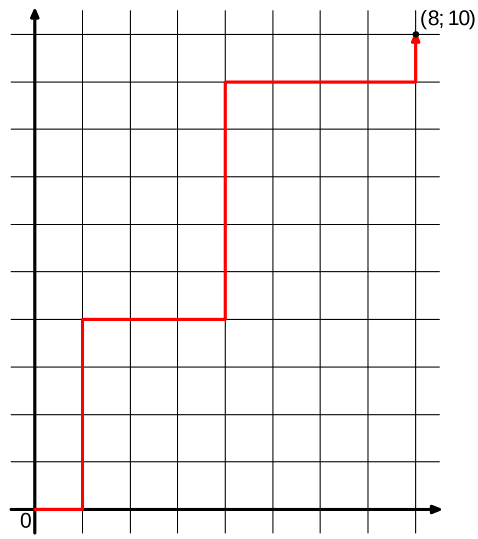
Решение. Пусть ξ и η — сроки службы датчика и передатчика соответственно. Очевидно, $\min(\xi,\eta)\le\xi$. Переходя к ожиданиям, получим, что средний срок службы прибора равен $\mathrm{E}\min(\xi,\eta)\le\mathrm{E}\xi=3$. Значит, средний срок службы прибора не больше трех лет[4].

Ответ: ошибся.

[3] Из равенства $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$ следует $\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$, откуда $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$.

[4] Многие участники олимпиады решили, что средний срок службы прибора равен ровно 3 года - наименьшему из сроков службы датчика и передатчика. Нет, это неверно. В общем случае, средний срок службы прибора строго меньше, чем средний срок службы каждого из его компонентов.

9. Муха на решетке. Муха ползет из начала координат. При этом муха двигается только по линиям целочисленной сетки вправо или вверх (монотонное блуждание). В каждом узле сетки муха случайным образом выбирает направление дальнейшего движения: вверх или вправо. Найдите вероятность того, что в какой-то момент:



а) муха окажется в точке $(8;10)$;

б) муха окажется в точке $(8;10)$, по дороге пройдя по отрезку, соединяющему точки $(5;6)$ и $(6;6)$;

в) муха окажется в точке $(8;10)$, пройдя внутри круга радиуса 3 с центром в точке $(4;5)$.

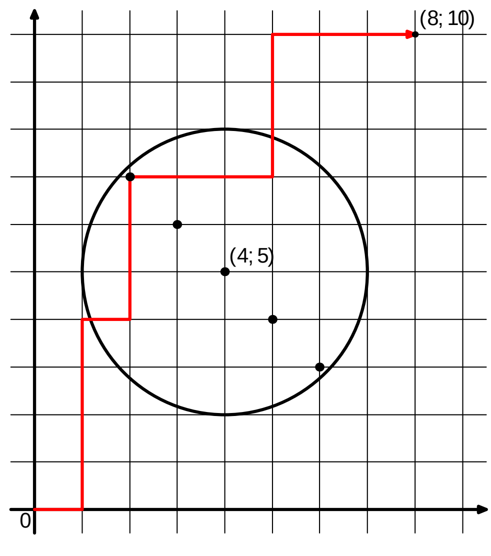
Решение. а) Муха может достичь точки $(8;10)$ ровно за 18 шагов — ни больше, ни меньше. Поэтому достаточно рассмотреть первые 18 шагов мухи. Общее число возможных путей, состоящих из 18 шагов равно 2^{18}.

Чтобы попасть в точку $(8;10)$ из этих 18 шагов, муха должна ровно 8 шагов сделать вправо и ровно 10 вверх. При этом порядок, в котором чередуются шаги вправо и вверх, не важен. Значит, число путей, приводящих в точку $(8;10)$, равно C_{18}^{8}.

Таким образом, вероятность попасть в эту точку равна $\dfrac{C_{18}^{8}}{2^{18}} \approx 0{,}167$.

б) Так же, как в предыдущей задаче найдем число путей, приводящих в точку $(5;6)$. Это число равно C_{11}^{5}. В точку $(6;6)$ из точки $(5;6)$ ведет только один путь. Затем муха должна пройти из точки $(6;6)$ в точку $(8;10)$, и здесь у нее C_6^2 возможных путей. Значит, всего условию задачи удовлетворяет $C_{11}^{5} \cdot C_6^2$ путей.

Общее число путей из 18 шагов равно 2^{18}. Значит, вероятность попасть в точку $(8;10)$, по дороге пройдя точки $(5;6)$ и $(6;6)$, равна $\dfrac{C_{11}^{5} \cdot C_6^2}{2^{18}} \approx 0{,}026$.



в) Муха пройдёт внутри круга в том и только том случае, когда она пройдёт через одну из пяти отмеченных точек (см. рис.) При этом муха может пройти только через одну из этих точек. Поэтому, чтобы найти число путей, ведущих в точку $(8;10)$ через круг, нужно найти число путей, проходящих через каждую из этих точек, и сложить результаты:

$$C_9^2C_9^6+C_9^3C_9^5+C_9^4C_9^4+C_9^5C_9^3+C_9^6C_9^2=$$
$$=2C_9^2C_9^6+2C_9^3C_9^5+C_9^4C_9^4.$$

Искомая вероятность равна[5]

$$\frac{2C_9^2C_9^6+2C_9^3C_9^5+C_9^4C_9^4}{2^{18}}=\frac{43092}{2^{18}}=\frac{10773}{2^{16}}\approx 0{,}164.$$

Ответ: а) $\dfrac{C_{18}^8}{2^{18}}\approx 0{,}167$;

б) $\dfrac{C_{11}^5\cdot C_6^2}{2^{18}}\approx 0{,}026$;

в) $\dfrac{2C_9^2C_9^6+2C_9^3C_9^5+C_9^4C_9^4}{2^{18}}\approx 0{,}164$.

10. Наименьшая дисперсия. В числовом наборе n чисел, причем одно из чисел равно 0, а другое равно 1. Какова наименьшая возможная дисперсия такого набора чисел? Каким для этого должен быть набор?

Решение. Обозначим числа a_k, где $k=1,...,n$, а среднее арифметическое всех чисел a.

Дисперсия набора равна

$$S^2=\frac{(0-a)^2+(a_2-a)^2+...+(a_{n-1}-a)^2+(1-a)^2}{n}.$$

Разобьем сумму в числителе на две группы — первое слагаемое объединим с последним, а во вторую группу войдут остальные слагаемые (если они есть):

$$\left(a^2+(1-a)^2\right)+\left((a_2-a)^2+...+(a_{n-1}-a)^2\right).$$

Если $n=2$, то вторая группа отсутствует. Если $n>2$, то чтобы эта сумма была наименьшей возможной, положим

$$a_2=a_3=...=a_{n-1}=a.$$

Тогда

$$S^2=\frac{a^2+(1-a)^2}{n}.$$

Оценим числитель снизу, используя неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным.

[5] **Комментарий**. Результат почти такой же, как и в пункте а). Причина в том, что вероятность попасть в точку $(8;10)$, пройдя через одну из *неотмеченных* точек очень мала, поскольку крайние элементы треугольника Паскаля малы по сравнению с центральными.

Если $a>1$ или $a<0$, то

$$a^2+(1-a)^2 \ge 2\left(\frac{a+a-1}{2}\right)^2=\frac{(2a-1)^2}{2}>\frac{1}{2}.$$

Если $0\le a\le 1$, то $a^2+(1-a)^2 \ge 2\left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=1-a$, то есть, когда $a=\frac{1}{2}$.

При этих условиях дисперсия равна $S^2=\frac{\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{n}=\frac{1}{2n}$.

Ответ: $\frac{1}{2n}$. Все числа, кроме первого и последнего равны $\frac{1}{2}$.

11. **Что? Где? Когда?** Знатоки и Телезрители играют в «Что, где, когда» до шести побед — кто первый выиграл шесть раундов, тот и победил в игре. Вероятность выигрыша Знатоков в одном раунде равна $0,6$, ничьих не бывает. Сейчас Знатоки проигрывают со счетом $3:4$. Найдите вероятность того, что Знатоки все же выиграют.

Решение. Пусть Знатоки выигрывают один раунд с вероятностью p, а Телезрители — с вероятностью $q=1-p$.

Знатокам до победы осталось 3 победных раунда, а Телезрителям — 2 раунда. Таким образом, всего может состояться еще не более 4 раундов. Рассмотрим возможные цепочки выигрышей Знатоков (З) и Телезрителей (Т) в будущих четырех раундах[6]. Например, возможна цепочка ЗЗТЗ, приводящая к победе Знатоков с вероятностью p^3q.

Если цепочка из четырех букв содержит меньше трех букв З, то она приводит к победе телезрителей.

В остальных случаях, то есть когда в цепочке три или четыре буквы З, побеждают Знатоки. Вероятность этого

$$C_4^4p^4+C_4^3p^3q=1\cdot 0,6^4+4\cdot 0,6^3\cdot 0,4=0,4752.$$

Ответ: $0,4752$.

12. Муха на решетке 2. Муха двигается из начала координат только вправо или вверх по линиям целочисленной сетки (монотонное блуждание). В каждом узле сетки муха случайным образом выбирает направление дальнейшего движения: вверх или вправо.

[6] Мы предполагаем, что любая цепочка состоит из четырех раундов – это то же самое, что дать игрокам играть четыре раунда, независимо от того, наступила уже чья-то победа или нет.

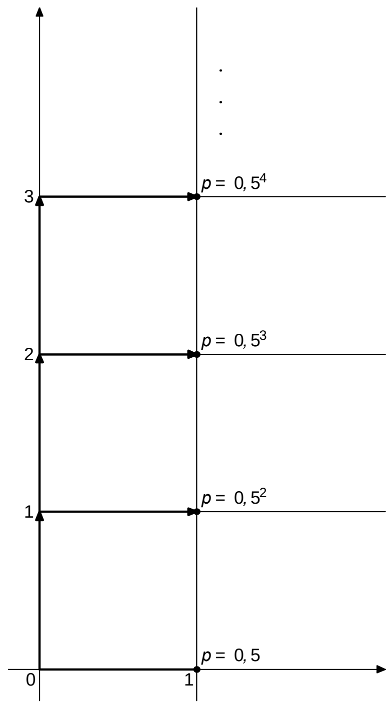
а) Докажите, что рано или поздно муха достигнет точки с абсциссой 2011.

б) Найдите математическое ожидание ординаты Мухи в момент, когда муха достигла абсциссы 2011.

а) Доказательство. Достаточно показать, что муха рано или поздно достигнет абсциссы 1. Вероятность того, что из абсциссы 0 муха сразу же перейдет в точку с абсциссой 1, равна $0{,}5$. Вероятность перехода в точку с абсциссой 1 на втором шаге равна $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5^2$ и т.д. Вероятность того, что муха перейдет из абсциссы 0 в абсциссу 1 на k-м шаге равна $0{,}5^k$. Складывая все эти вероятности, найдем, что вероятность перейти из 0 в 1 на каком-либо шаге равна

$$0{,}5 + 0{,}5^2 + ... + 0{,}5^k + ... = 0{,}5 \cdot \frac{1}{1-0{,}5} = 1.$$

Значит, переход из абсциссы 0 в абсциссу 1 достоверен[7].



Таким образом, муха обязательно попадет в точку с абсциссой 1. Рассуждая точно так же, получим, что рано или поздно муха из точки с абсциссой 1 перейдет в точку с абсциссой 2. И так далее — рано или поздно муха достигнет любой целой положительной абсциссы. В частности абсциссы 2011.

б) Решение. Проще всего рассуждать так: в среднем на один шаг вверх приходится один шаг вправо. Значит, на 2011 шагов вправо, следует ожидать 2011 шагов вверх.

Более строгое рассуждение таково: Обозначим ξ_k ($k = 1,...,2011$) случайную величину «увеличение ординаты мухи с момента, когда муха впервые попала в точку с абсциссой $k-1$, до момента, когда муха впервые попала в точку с абсциссой k».

Назовем ξ ординату мухи в момент, когда она достигла абсциссы 2011. Тогда

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ... + \xi_{2011}.$$

Рассмотрим подробнее ξ_1. Эта величина — ордината мухи в момент, когда муха впервые попала в точку с абсциссой 1.

Несложно понять, как распределена[8] величина ξ_1. Для этого достаточно посмотреть на рисунок, где показаны возможные пути мухи в точку с абсциссой 1 и вероятности этих путей.

---

[7] Если вы незнакомы с суммированием геометрической прогрессии, можно рассуждать иначе: вероятность того, что муха никогда не перейдет из абсциссы 0 в абсциссу 1 равна вероятности того, что муха всегда будет идти только вверх:

$$0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot ..... \cdot 0{,}5 \cdot .... .$$

Это произведение неотрицательное, но оно меньше любого положительного числа, поскольку при каждом умножении предыдущее произведение уменьшается вдвое. Значит, это число равно нулю: $0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot ... = 0$. Значит, вероятность бесконечного движения строго вверх нулевая.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ 0,5 & 0,5^2 & 0,5^3 & 0,5^4 & 0,5^5 & \dots & 0,5^{k+1} & \dots \end{pmatrix}$$

Найдем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}\xi_1 = 1\cdot 0,5^2 + 2\cdot 0,5^3 + 3\cdot 0,5^4 + 4\cdot 0,5^5 + \dots =$$
$$= 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4 + 0,5^5 + \dots +$$
$$+0,5\left(1\cdot 0,5^2 + 2\cdot 0,5^3 + 3\cdot 0,5^4 + \dots\right) =$$
$$= 0,5^2 \cdot \frac{1}{1-0,5} + 0,5\mathrm{E}\xi_1 = 0,5 + 0,5\mathrm{E}\xi_1.$$

Получается уравнение $\mathrm{E}\xi_1 = 0,5 + 0,5\cdot \mathrm{E}\xi_1$, из которого находим: $\mathrm{E}\xi_1 = 1$.

Поскольку все величины ξ_k по построению распределены одинаково, находим:

$$\mathrm{E}\xi = \mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}\xi_2 + \mathrm{E}\xi_3 + \dots + \mathrm{E}\xi_{2011} = 2011\cdot \mathrm{E}\xi_1 = 2011.$$

Ответ: 2011.

13. Дисперсия углов. Точку O, лежащую внутри треугольника ABC, соединили отрезками с вершинами треугольника. Докажите, что дисперсия набора углов AOB, AOC и BOC меньше, чем

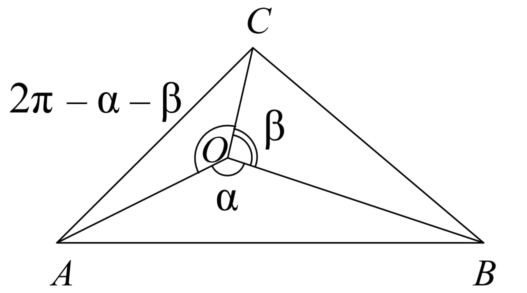
а) $\frac{10\pi^2}{27}$; б) $\frac{2\pi^2}{9}$.

Доказательство. а) Сумма всех трех углов равна 2π, поэтому среднее значение равно $\frac{2\pi}{3}$. Очевидно, каждый угол меньше π, при этом хотя бы один из них не больше, чем $\frac{2\pi}{3}$. Тогда дисперсию можно оценить:

$$S^2 < \frac{\pi^2 + \pi^2 + \frac{4\pi^2}{9}}{3} - \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \frac{10\pi^2}{27}.$$

б) Эта оценка более тонкая. Ясно, что среди углов найдется угол $\alpha \ge \frac{2\pi}{3}$. Поскольку $\alpha < \pi$, а сумма трех углов равна 2π, среди оставшихся двух углов есть угол $\beta > \frac{\pi}{2}$. Тогда третий угол равен $2\pi - \alpha - \beta$. При этом $\frac{2\pi}{3} \le \alpha < \pi$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

[8] Это разновидность геометрического распределения. Если свойства геометрического распределения известны, то найти ожидание ξ_1 несложно: $\mathrm{E}\xi_1 = \frac{1}{0,5} - 1 = 1$.



Составим выражение для дисперсии:

$$S^2=\frac{\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(\beta-\frac{2\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha-\beta\right)^2}{3}=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{3}=\frac{2x^2+2y^2+2xy}{3},$$

где $x=\alpha-\frac{2\pi}{3}$ и $y=\beta-\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, достаточно оценить сверху величину

$$z(x,y)=2x^2+2y^2+2xy=3x^2+3y^2-(x-y)^2 \qquad (1)$$

при условиях $0\le x<\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3}$.

Рассмотрим более широкую область, включив в нее границы: $0\le x<\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3}$. При этих условиях все три слагаемых в (1) одновременно станут наибольшими, только если $x=y=\frac{\pi}{3}$. При этом

$$z_{\max}=z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Значит, во всех точках области $0\le x<\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{3}$ выполняется неравенство $z(x,y)<\frac{2\pi^2}{3}$.

Следовательно, $S^2=\frac{z(x;y)}{3}<\frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi^2}{3}=\frac{2\pi^2}{9}$.

14. Советники короля Артура. У короля Артура два одинаково мудрых советника — Мерлин и Персифаль. Каждый из них находит верный ответ на любой вопрос с вероятностью p или неверный ответ — с вероятностью $q = 1 - p$.

Если оба советника говорят одно и то же, король слушается их. Если они говорят противоположное, то король выбирает решение, подбрасывая монету.

Однажды Артур задумался — зачем ему два советника, не хватит ли одного? Тогда король позвал советников и сказал:

— Мне кажется, что вероятность принятия верных решений не уменьшится, если оставлю одного советника и буду его слушаться. Если это так, я должен уволить одного из Вас. Если это не так, я оставлю все, как есть. Ответьте мне, должен ли я уволить одного из вас?

— Кого именно ты собираешься уволить, король Артур? — спросили советники.

— Если я приму решение уволить одного из вас, то сделаю выбор с помощью жребия, бросив монету.

Советники ушли думать над ответом. Советники, повторим, одинаково мудрые, но не одинаково честные. Персифаль очень честен и постарается дать верный ответ, даже если ему грозит увольнение. А Мерлин, честный во всем прочем, в этой ситуации решает дать такой ответ, чтобы вероятность его увольнения была как можно меньше. Какова вероятность того, что Мерлин будет уволен?

Решение. Мерлин должен рассуждать так.

«*Разберемся, следует ли увольнять советника. Если советник один, то король, следуя его совету, примет верное решение с вероятностью* p *по любому вопросу.*

Что происходит, когда советников двое? Вероятность того, что мы оба даем верный ответ, равна p^2. *Тогда король с вероятностью 1 принимает верное решение. Если оба советника ошибаются (с вероятностью* q^2*), то король принимает верное решение с вероятностью 0. Наконец, если советники расходятся (вероятность* $2pq$*), то король выбирает верное решение с вероятностью* $\frac{1}{2}$. *Формула полной вероятности дает:*

$$\mathrm{P}\left(\textit{Король принял верное решение}\right) = p^2 \cdot 1 + 2pq \cdot \frac{1}{2} = p\left(p+q\right) = p.$$

Таким образом, вероятность верного решения не меняется, поэтому увольнять одного из советников надо.

Если я скажу «Да, нужно увольнять», то есть два варианта.

1. Персифаль тоже скажет «Да» с вероятностью p, *и тогда король уволит меня с вероятностью* $\frac{1}{2}$.

2. Персифаль ошибется (вероятность q), и тогда король примет решение, бросая монету. Если он решит кого-то уволить (вероятность 0,5*), то это буду я опять же с вероятностью* 0,5.

Таким образом,

$$\mathrm{P}(\textit{Меня уволят, если я скажу "Да"}) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q .$$

Если я скажу «Нет, никого увольнять не надо», то опять есть два случая.

1. Персифаль скажет «Да» (с вероятностью p) и тогда король может уволить меня, дважды бросая монету (с вероятностью 0,25*).*

2. Персифаль ошибется (вероятность q), и тогда король никого не уволит, поскольку мы скажем одно и то же.

Значит, $\mathrm{P}(\textit{Меня уволят, если я скажу "Нет"}) = \frac{1}{4}p$.

Очевидно, $\frac{1}{4}p < \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q$. *Поэтому я должен сказать «**Нет**».*

По условию Мерлин найдет этот ответ с вероятностью p, а с вероятностью q Мерлин ошибется и поэтому скажет «Да, увольнять». Значит, по формуле полной вероятности:

$$\mathrm{P}(\text{Мерлина уволят}) = \frac{1}{4}p \cdot p + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}q\right) \cdot q = \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}pq + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$**.**

15. Носорог. На шкуре у Носорога складки — вертикальные и горизонтальные. Если у Носорога на левом боку a вертикальных, b горизонтальных складок, а на правом — c вертикальных и d горизонтальных, будем говорить, что это Носорог в состоянии $(ab\,cd)$ или просто Носорог $(ab\,cd)$.

Если Носорог чешется каким-то боком о баобаб вверх-вниз, и у Носорога на этом боку есть две горизонтальные складки, то эти две горизонтальные складки разглаживаются. Если складок нет, то ничего не происходит.

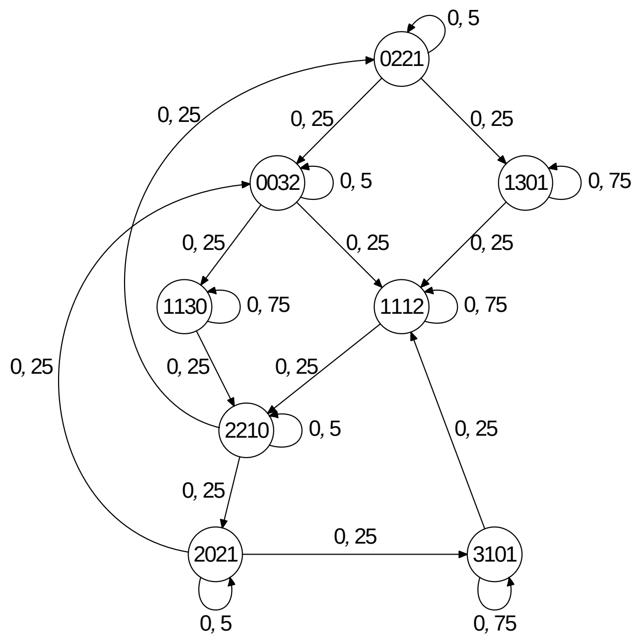
Аналогично, если Носорог чешется боком вперед-назад, и на этом боку есть две вертикальные складки, то они разглаживаются, если же таких двух складок не найдется, то ничего не происходит.

Если на каком-то боку две какие-то складки разглаживаются, то на другом боку немедленно появляется одна вертикальная складка и одна горизонтальная.

Носороги чешутся часто, случайным боком о случайные баобабы в случайных направлениях.

Вначале в саванне было стадо Носорогов $(02\,21)$. Докажите, что через некоторое время в саванне появится Носорог $(20\,21)$.

Доказательство. Построим граф, вершинами которого будем считать состояния Носорога, а ребрами со стрелками укажем возможные переходы между состояниями и их вероятности.



Оказывается, всего состояний 8. При этом никакое состояние не является конечным — из любого Носорог может перейти в любое другое. Но вот перейдет ли? Рассмотрим бесконечную последовательность переходов. Поскольку всего состояний конечное число, в силу принципа Дирихле среди них найдется такое состояние a, которое встретится бесконечное число раз.

Из этого состояния есть ненулевая вероятность p_a перейти в состояние $(20\,21)$, не заходя по дороге снова в a. Например, из состояния $a = (31\,01)$ есть цепочка

$$(31\,01) \xrightarrow{0,25} (11\,12) \xrightarrow{0,25} (22\,10) \xrightarrow{0,25} (20\,21)\ ,$$

не проходящая вторично через $(31\,01)$. Следовательно, $p_{(31\,01)} \ge 0,25^3 > 0$.

Поэтому $q_a = 1 - p_a < 1$, то есть вероятность вернуться из a в a, не заходя в состояние $(20\,21)$, меньше единицы.

Значит, вероятность события «Носорог никогда не попадает в состояние $(20\,21)$ из состояния a» равна

$$q_a \cdot q_a \cdot q_a \cdot q_a ... = 0.$$

Поэтому Носорог обязательно когда-нибудь попадет в состояние $(20\,21)$ и, значит, такой Носорог будет ходить по саванне (хотя бы до следующего баобаба).

16. Шеренга. По свистку учителя физкультуры все 10 мальчиков и 7 девочек выстроились в шеренгу в случайном порядке — кто куда успел. Найдите математическое ожидание величины «Число девочек, стоящих левее всех мальчиков».

Решение. Добавим мысленно еще одного мальчика, поставив его правее всех. Тогда вся шеренга разделилась на 11 групп, каждая из которых заканчивается мальчиком. Наименьшая группа состоит из одного мальчика, наибольшая может состоять из 8 человек — 7 девочек и одного мальчика.

Пронумеруем эти группы слева направо и назовем ξ_k численность k-й группы. Нас интересует ожидаемая численность первой группы, то есть $\mathrm{E}\xi_1$.

Сумма всех величин ξ_k равна 18 (17 настоящих школьников и один мысленный мальчик):

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{11} = 18. \qquad (2)$$

В силу случайности все величины ξ_k распределены одинаково, поэтому их ожидании равны между собой и равны $\mathrm{E}\xi_1$. Переходя в равенстве (2) к ожиданиям, получим: $11\mathrm{E}\xi_1 = 18$, откуда $\mathrm{E}\xi_1 = \frac{18}{11}$. Ожидаемое число девочек на 1 меньше: $\frac{7}{11}$.

Ответ: $\frac{7}{11}$.

17. Живучесть Змея Горыныча. Илья Муромец встречает трехголового Змея Горыныча. Каждую минуту Илья отрубает одну голову Змею. Пусть x — живучесть Змея ($x > 0$). Вероятность того, что на месте отрубленной головы вырастет s новых голов ($s = 0,1,2$), равна

$$p_s = \frac{x^s}{1+x+x^2}.$$

В течение первых 10 минут сражения Илья записывал, сколько голов вырастало на месте каждой срубленной. Получился следующий вектор:

$$K = (1,2,2,1,0,2,1,0,1,2)$$

Найдите такое значение живучести Змея, при котором вероятность вектора K наибольшая[9].

Решение. В силу взаимной независимости отрастания голов (число отросших голов зависит только от живучести, но не от предыдущих событий) вероятность вектора K равна $\mathrm{P}(K) = p_1p_2p_2p_1p_0p_2p_1p_0p_1p_2 = \frac{x^{12}}{\left(1+x+x^2\right)^{10}}$.

Это функция от x. Нужно найти точку, в которая эта функция принимает наибольшее значение на луче $(0;+\infty)$.

Найдем производную:

$$\mathrm{P}' = \frac{12x^{11}\left(1+x+x^2\right)^{10} - 10\left(1+x+x^2\right)^9(1+2x)x^{12}}{\left(1+x+x^2\right)^{20}} = -\frac{2x^{11}\left(4x^2-x-6\right)}{\left(1+x+x^2\right)^{11}}.$$

Приравнивая производную к нулю, получаем единственный положительный корень уравнения: $x_0 = \frac{\sqrt{97}+1}{8} \approx 1{,}36$. При $0 < x < x_0$ производная положительна, при $x > x_0$ — отрицательна. Значит, найденная точка — единственная точка максимума, поэтому функция P принимает наибольшее значение только в этой точке.

Ответ: $\frac{\sqrt{97}+1}{8} \approx 1{,}36$.

[9] Описанный метод поиска оценки параметра модели, исходящий из максимума вероятностей осуществившихся событий, является разновидностью **метода наибольшего правдоподобия**.

18. Популяция[10]. Рассеянный Ученый в своей лаборатории вывел одноклеточный организм, который с вероятностью 0,6 делится на два таких же организма, а с вероятностью 0,4 погибает, не оставив потомства. Найдите вероятность того, что через некоторое время у Рассеянного Ученого не останется ни одного такого организма.

Решение. Не важно, какое время будет затрачено. Поэтому для простоты будем считать, что организмы делятся или погибают каждую секунду, но строго по одному. Когда с одним из них что-то происходит, остальные терпеливо ждут своей очереди. Сделав такое предположение, мы получаем стандартную задачу случайного блуждания: каждую секунду организмов становится либо на один больше (с вероятностью $p = 0,6$), либо на один меньше (с вероятностью $q = 0,4$), чем было.

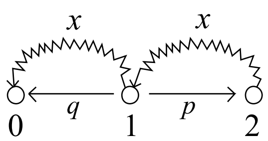
Число организмов в некоторый момент будем называть состоянием популяции. Обозначим x вероятность того, что за несколько шагов число организмов уменьшится на 1.

Вначале популяция находится в состоянии 1, и нас интересует вероятность перехода $1 \to 0$, то есть как раз значение x.

Популяция может прийти в состояние 0 двумя способами.

1. В первую секунду единственный имеющийся организм погибает. Вероятность этого q.

2. В первую секунду единственный организм делится, и популяция переходит в состояние 2. Вероятность этого события p. Дальнейший переход $2 \to 0$ имеет вероятность x^2, поскольку он состоит из двух независимых переходов $2 \to 1$ и $1 \to 0$, каждый из которых имеет вероятность x.



Таким образом, формула полной вероятности дает уравнение $x = q + p \cdot x^2$.

Найдем корни: $x = 1$ или $x = \dfrac{q}{p}$. Нужно выяснить, какой из корней посторонний. Рассмотрим x как функцию от p. Изобразив в системе координат pOx линии $x(p) = 1$ и $x(p) = \dfrac{1-p}{p}$, воспользуемся следующими соображениями.

1. Функция $x = x(p)$ непрерывна.

2. $x(p) \leq 1$.

3. $x(1) = 0$ — если организмы не погибают, а только делятся, то популяция с достоверностью не погибнет никогда.

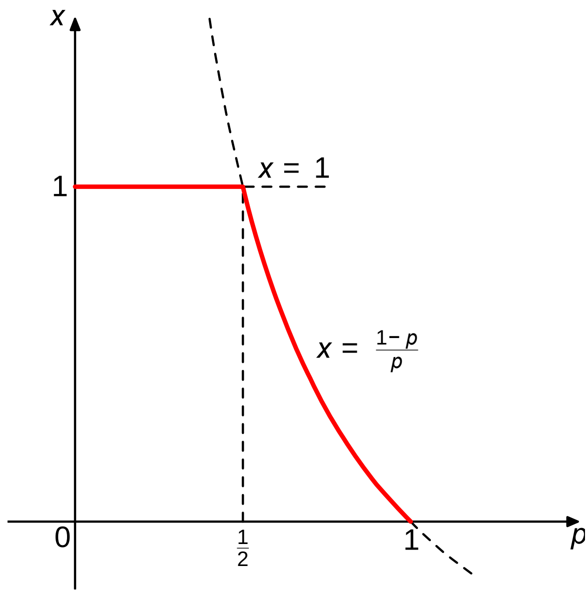
[10] Популяцией называют всю совокупность организмов одного вида

Этим трем условиям, удовлетворяет функция, график которой выделен на рисунке.

$$x(p)=\begin{cases}1, \text{если } 0\le p\le \dfrac{1}{2},\\ \dfrac{q}{p}, \text{если } \dfrac{1}{2}<p\le 1.\end{cases}$$

В нашем случае $p=0,6>\frac{1}{2}$, следовательно, $x=\frac{q}{p}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.



19. Конец Змея Горыныча. Илья Муромец встречает трехголового Змея Горыныча. И начинается битва. Каждую минуту Илья отрубает Змею одну голову. С вероятностью $\frac{1}{4}$ на месте срубленной головы вырастает две новых, с вероятностью $\frac{1}{3}$ — только одна новая голова и с вероятностью $\frac{5}{12}$ — ни одной головы. Змей считается побежденным, если у него не осталось ни одной головы. Найдите вероятность того, что рано или поздно Илья победит Змея.

Решение. Задачу немного запутывает случай, когда взамен отрубленной головы вырастает одна голова, и тем самым число голов не меняется. Удалим эту трудность, учитывая только те удары Ильи, когда число голов меняется. Такие удары Ильи Муромца назовем **успешными**.

Найдем вероятность того, что когда-нибудь наступит последний успешный удар. Это значит, что начиная с этого, успешных ударов больше не случится, то есть все удары будут безуспешными. Вероятность этого равна

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot....=0.$$

(Это число неотрицательно, но меньше любого положительного числа, поэтому оно равно нулю). Таким образом, последнего успешного удара не будет, а будет бесконечная подпоследовательность успешных ударов, которую мы и будем рассматривать, игнорируя все остальные удары.

Вероятность успешного удара равна $\frac{2}{3}$. Условная вероятность того, что при успешном ударе число голов увеличилось, равна $\frac{1}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$.

Аналогично, условная вероятность того, что при успешном ударе голов стало меньше, равна $\frac{5}{12}:\frac{2}{3}=\frac{5}{8}$.

Возникает стандартная задача одномерного случайного блуждания[11]. Предположим, что в результате некоторой серии успешных ударов число голов Змея стало на одну меньше, чем было. Назовем это событие D, а его вероятность обозначим x.

Есть две возможности.

1. В результате первого успешного удара голов стало на одну меньше (событие M, вероятность $\frac{5}{8}$). В этом случае событие D уже произошло — его условная вероятность равна 1.

2. В результате первого успешного удара голов становится больше на одну (событие N, вероятность $\frac{3}{8}$). В этом случае событие D наступит, только если число голов уменьшится на 2 — на одну, а потом еще на одну. Поэтому условная вероятность события D в этом случае равна x^2.

По формуле полной вероятности находим:

$$x=\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(D|M)\cdot\mathrm{P}(M)+\mathrm{P}(D|N)\cdot\mathrm{P}(N)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}x^2.$$

Решим получившееся уравнение $3x^2-8x+5=0$. Получим: $x=1$ или $x=\frac{5}{3}$. Второй корень посторонний. Значит, событие D достоверно.

Таким образом, рано или поздно число голов обязательно уменьшится с трех до двух. Затем, по той же причине, число голов уменьшится до одной и, наконец, число голов определенно станет равно нулю. У Змея нет шансов.

Ответ: 1.

[11] В этот момент можно воспользоваться рассуждениями в предыдущей задаче: вероятность увеличения числа голов меньше, чем вероятность уменьшения, поэтому $x(p)=1$ – вероятность того, что когда-нибудь число голов уменьшится, равна 1.